МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

Высшего профессионального образования

«Казанский национальный исследовательский технологический университет»

(ФГБОУ ВПО «КНИТУ»)

Институт развития непрерывного образования

«Лицей-интернат для одаренных детей

им. академика П.А. Кирпичникова с углубленным изучением химии»

Методическое пособие

Теория вероятности

Автор: учитель математики

«Лицея-интерната для одаренных детей

им. академика П.А. Кирпичникова

с углубленным изучением химии»

Н.Н.Матросова

п.Дубровка

2016г

**Пояснительная записка**

Данное методическое пособие рассчитано на широкий круг читателей: прежде всего это школьные учителя и учащиеся, кроме того она будет полезна студентам осваивающим комбинаторику и теорию вероятностей самостоятельно, а так же всем любителям математики. Привлекательность данной работы состоит в её компактности. В данной разработке приведён необходимый теоретический материал, дано подробное решение типовых задач, некоторые задачи решены двумя способами, а так же имеется большое количество примеров и задач для самостоятельного решения с ответами, которые помогут закрепить изученный материал. Методическое пособие может быть использована преподавателями для проведения факультативного курса по теории вероятности и учащимися при подготовке к ЕГЭ по математике, в частности для отработки навыков решения задания 4.

Темы расположены в удобной последовательности, это позволяет вести обучение поэтапно, опираясь на ранее полученные знания. Четко выдержано единообразие буквенных обозначений, формульная символика правильная.

Весь материал поделен на темы, каждую тему можно рассматривать как отдельное занятие.

Тема данной методической разработки является актуальной, поскольку именно решение задач в разделе теория вероятности вызывает у учащихся серьезные затруднения. Данное пособие поможет начать обучение, и позволит освоить методы решения основных типовых задач.

**Тема: Элементы комбинаторики.**

Комбинаторика – это раздел математики, в котором исследуются и решаются задачи выбора элементов из исходного множества и размещения их в некоторой комбинации по заданным правилам.

**Например:**

 – исходное множество, содержащее 5 элементов.

Группы, составленные из каких либо элементов исходного множества, называются соединениями.

Соединения бывают трёх видов: перестановки, сочетания, размещения. Рассмотрим подробнее каждый из видов соединений.

Перестановки из n элементов - это такие соединения, которые отличаются друг от друга порядком размещения элементов.

**Например:**

Пусть исходное множество содержит три элемента . Составим из элементов исходного множества всевозможные перестановки:



Таким образом, получилось шесть перестановок.

В перестановках меняется только порядок расположения элементов.

Количество перестановок из n элементов считается по формуле:



**Например:**





 (по определению)

# Сочетания из n элементов по m в каждом, это такие соединения которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом без учёта порядка их расположения.

**Например:**

Пусть исходное множество  из пяти элементов. Составим из элементов данного множества всевозможные соединения по три элемента, которые будут отличаться друг от друга хотя бы одним элементом, без учёта порядка их расположения.



Таким образом, получилось 10 сочетаний. В сочетаниях меняется состав элементов. Количество сочетаний считается по формуле:



**Например: **

При решении задач используются формулы:



 (по определению)

 



## Размещения - из n элементов по m в каждом, это такие соединения, которые отличаются друг от друга либо составом элементов, либо порядком их расположения, либо тем и другим одновременно.

Количество размещений считается по формуле:



**Например:**



В размещениях меняется порядок расположения элементов и их состав.

1. Решить уравнение:



Ответ: 

2) Решить систему уравнений:



Решаем второе уравнение, так как оно содержит одну переменную



По условию  не удовлетворяет условиям задачи. Подставим  в первое уравнение:



Ответ: 

**Задания для самостоятельной работы:**

1) Вычислите :  .

Ответ: 

2) Найдите число размещений из  элементов по .

Ответ: 

3) Найдите число размещений из  по .

Ответ: 

4) Найдите число сочетаний из  элементов по  в каждом.

Ответ: 

5) Найдите число сочетаний из  элементов по  в каждом.

Ответ: 

6) Сколькими способами можно составить список из  человек?

Ответ:  способов.

7) Сколькими способами можно создать бригады из  человек по  человек в каждой?

Ответ:  способа.

8) Сколькими способами можно рассадить за столом четырёх человек?

Ответ:  способа.

9) Сколькими способами можно составить четырёхцветные ленты из семи лент различных цветов?

Ответ:  способов.

10) Сколькими способами можно выбрать четырёх лиц на четыре различные должности из четырёх кандидатов?

Ответ:  способа.

11) Сколько необходимо взять предметов, чтобы число размещений из них по четыре было в 12 раз больше, чем число размещений по два?

Ответ:  предметов.

12) Сколькими способами можно выбрать 3 из 6 открыток?

Ответ:  способов.

13) Сколькими способами можно расставить на полке 6 книг?

Ответ:  способов.



14) Число сочетаний из  элементов по  в  раз меньше числа сочетаний из  элементов по . Найдите .

Ответ:  или .

15) Решить уравнения:  Ответ: .

 Ответ: .

 Ответ: .

 Ответ: .

 Ответ: .

 Ответ: .

 Ответ: .

 Ответ: .

16) Решить систему уравнений:  Ответ:

 Ответ: 

 Ответ: 

**Тема: Соединения с повторениями.**

Размещения, являющиеся одним из трех видов соединений можно рассмотреть как поочередный выбор элементов из данного множества. Типичным примером такой задачи является составление слов из букв данного алфавита.

Пусть  - алфавит. Будем составлять из него трехбуквенные слова. Возможны два принципиально разных условия:

а) все буквы должны быть разными (размещение без повторений);

б) буквы можно повторять независимо друг от друга (размещение с повторениями).

Ситуацию можно представить так: в ящике лежат буквы (бочонки лото с буквами) и заготовлены места, куда мы будем их ставить.

Если после того, как мы вписали букву на место, её обратно вернуть нельзя, то в полученном слове все буквы будут различны. (размещение без повторений);

****

Если вписанную букву можно использовать еще раз (вернуть бочонок обратно в мешок), то буквы в слове повторяться могут (размещение с повторениями).

****

Количество размещений с повторениями из  по  вычисляется по формуле ****.

**Например:** Сколько различных четырехбуквенных слов можно записать с помощью букв «м» и «а».

Решение: Каждая из четырех букв составляемого слова последовательно выбирается из двух букв. Применив трижды правило умножения найдем число составленных четырехбуквенных слов:

**** или.

Перестановка – это расположение объектов в определенном порядке. 

**Например:** Найти количество всевозможных анаграмм слова «парк».

Решение: 

А теперь найдем количество всевозможных анаграмм слова «папа». Получим:

ПАПА ПААП АППА АПАП ППАА ААПП.

Это перестановки с повторениями.

Общая формула для подсчета количества перестановок с повторениями:

, где 

В нашем примере: 

**Решить задачу:**

1. Сколько анаграмм можно составить из слова «макака».

Решение:

«а» - используется три раза

«к» - используется два раза

«м» - используется один раз

 слов.

Сочетание – это одновременный выбор нескольких элементов из даннгог множества.

Количество сочетаний с повторениями из  по  вычисляется по формуле ****.

1. В киоске продаются карандаши трех цветов красные, синие, черные. Сколькими способами можно купить четыре карандаша.

Решение:

В задаче требуется найти число соединений состоящих из четырех элементов, выбранных из элементов трех видов, порядок расположения которых в соединениях не имеет значения.

т.е. 

1. В продажу поступили мячи семи различных цветов. Сколькими способами можно купить три мяча.

Решение:



**Задания для самостоятельной работы:**

1. Сколько различных трехзначных чисел, не имеющих одинаковых цифр, можно записать с помощью цифр: а) 1,2 и 3; б) 1,2,3 и 4?

Ответ: 

1. Сколько различных трехзначных чисел можно записать с помощью цифр: а) 6,7 и 8; б) 6,7,8 и 9?

Ответ: 

1. Сколько разных двузначных чисел можно записать, используя цифры

1,2,3 и 4?

Ответ: 

1. Сколько анаграмм можно составить из слова «математика»?

Ответ: 

1. В шахматном турнире участвуют пять юношей и три девушки. Сколькими способами могут распределиться места среди девушек, если все участники набрали разное количество очков?

Ответ: 

1. В кафе подавали мороженое четырех видов. Сколькими способами трое друзей могут сделать заказ официанту на три порции мороженого?

Ответ: 

1. Семь детских игрушек выбирают из игрушек четырех видов. Сколькими способами это можно сделать, если игрушек каждого вида больше семи?

Ответ: 

1. Сколько существует различных прямоугольных параллелепипедов, если длина каждого его ребра может быть любым целым числом от 1 до 8?

Ответ: 

**Тема: Классическое определение вероятности.**

Рассмотрим следующий пример: Подбрасываем многократно игральный кубик. Наблюдаем сколько раз на верхней грани кубика выпадет цифра . Условия одни и те же: один кубик, дна поверхность, отсутствие сильных внешних воздействий.

Наблюдения за объектами или явлениями в строго определённых условиях и измерение значений заранее определённых признаков этих объектов называется экспериментом (опытом).

Исходом эксперимента, называется значение наблюдаемого признака, полученного по окончании эксперимента.

Событием называют появление исхода, обладающего заранее указанным свойством.

В рассматриваемом примере объект - кубик, количество исходов – , событие – появление на верхней грани кубика цифры .

События обозначаются: 

События бывают достоверными, невозможными и случайными.

Если событие должно непременно произойти, то это достоверное событие. Например, выигрыш по билету беспроигрышной лотереи. Если событие заведомо не может произойти, то это невозможное событие. Например, при

подбрасывании кубика невозможно поучить  очков. Если событие при заданных условиях может произойти, а может, и нет, то это случайное событие. Например, появление цифры при подбрасывании монеты.

Вероятность события – мера объективной возможности появления случайного события.

Вероятностью события  называется отношение числа исходов  благоприятствующих наступлению события , к числу  всех исходов.



Если  невозможное событие, то .

Если  достоверное событие, то .

**Например:**

В лотерее  билетов. Из них,  – выигрышные. Вынимают на удачу один билет. Чему равна вероятность того, что этот билет будет выигрышным.

Решение: Общее число исходов , число благоприятствующих исходов . Отсюда .

Два события называются совместными, если они могут произойти одновременно при одном исходе эксперимента и несовместными, если они не могут произойти при одном исходе эксперимента.

**Например:**

1) Брошена игральная кость.

а) Событие  - на верхней грани 6 очков. Событие - на верхней грани 5

очков. События  и  не могут произойти в результате одного

эксперимента одновременно, поэтому они несовместные.

б) Событие  - на верхней грани 6 очков. Событие  - на верхней грани

чётное число очков. События  и  могут произойти при одном исходе

эксперимента, поэтому они совместные.

2) Из колоды карт вынимается одна карта.

а) Событие  - вынута карта король. Событие - вынута карта красной

масти. События  и  могут произойти в результате одного

эксперимента одновременно, поэтому они совместные.

б) Событие  - вынута карта король. Событие  - вынута карта валет.

События  и  не могут произойти при одном исходе эксперимента,

поэтому они несовместные.

События  и  называются противоположными событиями. События  и  несовместные. .

**Например:**

Брошена монета. Событие  - на монете орёл. Событие - на монете решка.

События  и  несовместные. .

Два события  и называются независимыми, если вероятность каждого из них  и  не зависит от наступления или не наступления другого.

**Например:**

1. Бросают монету и игральный кубик. Событие  - на монете орёл.

Событие - на кубике  очка. События  и  независимые.

1. Из четырёх тузов достают поочерёдно две карты, не возвращая. Событие - первая карта чёрной масти. Событие - вторая карта красной масти. Если событие  произошло, то. Если событие  не произошло, то . Следовательно события  и  зависимые.

**Решить задачу:**

1) В урне  белых и  чёрных шара. Вынимают наудачу  шар. Найти

вероятность того, что шар окажется чёрным.

Решение:

Пусть событие  - вынутый шар чёрный.



Ответ: 

2) В урне  белых и  чёрных шаров. Вынимают на удачу  шара. Какова

вероятность того, что оба шара окажутся чёрными.

Решение:

Пусть событие  - оба вынутых шара чёрные.



Ответ: 

В партии из  деталей находятся  бракованных. Наугад выбирают  деталей. Найти вероятность того, что из этих пяти деталей две окажутся бракованными.

Решение:

Пусть событие  -  бракованные и  стандартные детали.



Найдём число способов выборки трёх стандартных деталей из четырнадцати имеющихся:



Найдём число способов выборки двух бракованных деталей из четырёх имеющихся:



Любая группа стандартных деталей может комбинироваться с любой группой бракованных деталей. Следовательно, общее число комбинаций



Ответ: 

**Задания для самостоятельной работы:**

1. В лотерее  билетов. Из них  выигрышные и  невыигрышные. Куплено  билета. Какова вероятность того, что оба билета выигрышные.

Ответ: 

1. В группе из  учеников на контрольной работе получили:  учеников оценку «отлично»,  учеников оценку «хорошо»,  учеников оценку «удовлетворительно». Какова вероятность того, что все три ученика вызванных к доске имеют неудовлетворительные оценки по контрольной работе.

Ответ: 

1. В коробке имеется  лотерейных билетов, из которых  пустых (без выигрыша). Наудачу вынимают одновременно  билета. Найти вероятность того, что из четырёх билетов два окажутся выигрышными.

Ответ: 

1. Даны  точек, ни какие  из которых не лежат на одной прямой. Найти вероятность того, что, выбрав наугад  точки, учащийся получит нужную прямую.

Ответ: 

1. В классе  девочек и  мальчиков. Определить вероятность того, что оба вызванных ученика окажутся а)мальчиками б)девочками.

Ответ: 

1. В семизначном телефонном номере забыта последняя цифра. Определить вероятность того, что наугад выбранная цифра (от  до ) окажется верной.

Ответ: 

1. В партии из  деталей имеется  бракованных. Определить вероятность того, что, взятая наудачу деталь окажется стандартной.

Ответ: 

1. Из коробки содержащей  пронумерованных шаров, наугад вынимают один за другим все находящиеся в ней шары. Определить вероятность того, что номера шаров расположатся по порядку.

Ответ: 

1. Из букв составлено слово “КНИГА” Это слово рассыпали и произвольно собрали заново. Какова вероятность того, что снова получится слово “КНИГА”?

Ответ: 

1. В ящике с деталями оказалось  деталей I-го сорта,  деталей II-го

сорта и  деталей III-го сорта. Наудачу вынимают одну из деталей.

Чему равна вероятность, вынуть деталь I-го сорта, II-го сорта, III-го

сорта?

Ответ: 

1. В урне находятся  белых и  чёрных шаров. Найдите вероятность того, что: а) наудачу вынутый шар окажется чёрным;

б) два наудачу вынутых шара окажутся чёрными?

Ответ: ; 

1. Монета подброшена два раза. Какова вероятность того, что оба раза

выпадет герб?

Ответ: 

1. Считая выпадение любой грани игральной кости одинаково вероятным,

найдите вероятность выпадения грани с нечётным числом очков.

Ответ: 

1. В урне находятся  белых и  чёрных шаров. Наудачу вынимают
2. один шар, который оказывается белым, и откладывают его в сторону.
3. После этого берут ещё один шар. Найдите вероятность того, что этот шар
4. тоже окажется белым.
5. Ответ: 
6. Вероятность того, что размеры детали, выпускаемой станком – автоматом, окажутся в пределах указанных допусков, равна . Какое количество годных деталей в среднем будет содержаться в каждой партии объёмом  штук.

Ответ: 

1. Для проверки на всхожесть было посеяно  семян, из которых 

проросло. Чему равной можно считать вероятность прорастания

отдельного семени в этой партии? Сколько семян взойдёт в среднем из

каждой тысячи посеянных?

Ответ: 

1. В ящике находятся  красных и  белых шаров. Из ящика извлечены три шара. Найти вероятность того, что два из них останутся красными.

Ответ: 

**Тема: Теоремы сложения вероятностей.**

1. Вероятность появления одного из двух (нескольких) событий равна сумме вероятностей этих событий.



1. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления.



**Решить задачу:**

1. В ящике в случайном порядке расположены  деталей, причём  из них стандартные. Рабочий берёт на удачу  детали. Найти вероятность того, что по крайней мере одна из взятых деталей окажется стандартной.

Решение:

I способ: Событие  - по крайней мере одна деталь стандартная. Событие  произойдёт, если произойдёт любое из 3-х несовместных событий:

- 1 деталь стандартная, 2 нестандартные.

- 2 детали стандартные, 1 нестандартная.

- 3 детали стандартные.

Таким образом 



Ответ: 

II способ:

- хотя бы одна деталь стандартна.

- не одна из взятых деталей не оказалась стандартной.



Ответ: 

1. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо , либо , либо тому и другому одновременно.

Решение:

Событие - число кратно 

Событие - число кратно 

События  и являются совместными. Следовательно, по теореме сложения совместных событий имеем:



Всего:  двузначных чисел;

 из них кратны  (благоприятствуют наступлению события )

 чисел кратны  (благоприятствуют наступлению события )

 чисел кратны  и  одновременно (благоприятствуют наступлению события  и одновременно)



Ответ: 

1. В урне находятся  белых,  чёрных,  синих и  красных шаров. Найдите вероятность того, что вынутый шар окажется:

а) белым;

б) чёрным или красным.

Решение:

а) Событие - вынутый шар белый.





Ответ: 

б) Событие - вынутый шар чёрный или красный. Событие  произойдёт если произойдёт одно из двух несовместных событий.

= - несовместные события.



Ответ: 

**Задания для самостоятельной работы:**

1. В корзине имеется  белых и  чёрных перчаток. Найти вероятность того, что пара, которую достали наугад, окажется одноцветной.

Ответ: 

1. Имеется  лотерейных билетов. Известно, что на  билетов попадает выигрыш по  рублей, на  билетов – по  рублей, на  билетов – по рублей, на  билетов – по  рубля и на остальные ничего. Найдите вероятность того, что на купленный билет будет получен выигрыш не менее  рублей.

Ответ:

1. В коробке находятся  лампочек из них  по  Вт,  по  Вт,  по  Вт и  по  Вт. Вычислить вероятность того, что мощность любой взятой наугад лампочки не превышает  Вт.

Ответ: 

1. В группе  человек учатся на «отлично»,  человек на «хорошо» и «отлично»,  человек имеют тройки и три человека неудовлетворительные оценки. Определить вероятность того, что вызванный учащийся не имеет ни двоек, ни троек.

Ответ: 

1. У продавца имеется  красных,  синих,  зелёных и  жёлтых шаров. Вычислить вероятность того, что купленный шар окажется красным, синим или зелёным.

Ответ: 

1. Из тридцати учащихся спортивной школы  человек занимаются баскетболом,  – волейболом, а остальные другими видами спорта. Какова вероятность того, что наудачу выбранный спортсмен занимается только волейболом, или только баскетболом.

Ответ: 

1. Дано  Найти 

Ответ: 

1. Пусть . Совместны ли события  и .

Ответ: совместны.

1. Предприятие даёт в среднем  продукции высшего сорта и продукции первого сорта. Какова вероятность того, что случайно взятое изделие окажется высшего или первого сорта.

Ответ: 

1. Талоны, свёрнутые в трубочку, занумерованы всеми двузначными числами. Наудачу берут один такой талон. Какова вероятность того, что номер взятого талона состоит из одинаковых цифр.

Ответ: 

1. В ящике, в случайном порядке, положены  деталей, из которых  стандартных. Контролёр взял на удачу  детали. Найдите вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей оказалась стандартной.

Ответ: 

1. Найдите вероятность того, что на удачу взятое двузначное число окажется кратным либо четырём, либо пяти, либо тому и другому одновременно.

Ответ: 

1. Стрелок попал в мишень, разделённую на три не пересекающиеся части. Вероятность попадания в первую часть равна , во вторую - . Найдите вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадает : а) либо в первую, либо во вторую часть; б) в третью часть.

Ответ:

1. Из чисел  на удачу выбирается число. Найти вероятность того, что это число делится на два или на три.

Ответ: 

1. ОТК проверяет половину изделий некоторой партии и признаёт годной всю партию, если среди проверенных изделий бракованных не более одного. Какова вероятность того, что партия из двадцати деталей, в которой две бракованные будет признана годной.

Ответ:

**Тема: Теоремы умножения вероятностей.**

1. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.



1. Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению одного из них на условную вероятность второго.



**Решить задачу:**

1) В одной урне находятся  белых и  чёрных шаров, в другой  белых и  чёрных шаров. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

Решение:

 - белый шар из первой урны

 - белый шар из второй урны

 и  независимые события.

  

Ответ: 

2) В ящике находятся  деталей, из которых  стандартных. Рабочий берёт наудачу одну за другой две детали. Найти вероятность того, что обе окажутся стандартными.

Решение:

 - первая деталь стандартна

 - вторая деталь стандартна

 и  зависимые события.

  

Ответ: 

1. В урне находятся 10 белых и 6 чёрных шаров, найдите вероятность того, что три наудачу вынутых один за другим шара окажутся чёрными.

Решение:

 - первый чёрный

 - второй чёрный

 - третий чёрный

, , - зависимые события.





Ответ: 

**Задания для самостоятельной работы:**

1) Три стрелка стреляют по цели. Вероятность попадания в цель

первым стрелком равна ; вторым стрелком – ; третьим стрелком – . Определить вероятность того, что все три стрелка одновременно попадут в цель.

Ответ: 

2) В условиях предыдущей задачи определить вероятность того, что в цель попадёт хотя бы один стрелок.

Ответ: 

1. Производится три выстрела по одной мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна . Найти вероятность того, что в результате этих выстрелов будет только одно попадание.

Ответ: 

1. В экзаменационные билеты включено по два теоретических вопроса и по одной задаче. Всего составлено  билетов. Вычислить вероятность того, вынув наудачу билет, учащийся ответит на все вопросы, если он подготовил  теоретических вопросов и  задачи.

Ответ: 

1. Вероятность сдачи зачёта учащимся равна , а вероятность сдачи экзамена - . Какова вероятность того, что учащийся сдаст экзамен.

Ответ: 

1. Игральную кость бросают трижды. Какова вероятность того, что цифра  выпадет три раза.

Ответ: 

1. Имеются две урны. В первой урне находятся  белый,  чёрных и  красных шара; во второй –  белых,  чёрных и  красных шара. Из каждой урны достают по одному шару и сравнивают их цвета. Найти вероятность того, что цвета обоих шаров совпадут.

Ответ: 

1. В классе  мальчиков и  девочек. Нужно выбрать делегацию из двух человек. Какова вероятность, если считать выбор случайным, что выбраны: а) два мальчика

б) две девочки

в) девочка и мальчик.

Ответ: 

1. В урне  белых шаров и  чёрный шар. Вынули сразу  шара. Какова

вероятность того, что все шары белые.

Ответ: 

1. Вероятность попадания баскетболистом в кольцо равна .

Баскетболист сделал серию из четырёх бросков. Какова вероятность

того, что при этом было ровно три попадания?

Ответ: 

1. Вероятность попадания в цель при одном выстреле составляет .

Найдите вероятность трёх попаданий при четырёх выстрелах.

Ответ: 

1. В первом ящике  белых и  чёрных шаров. Во втором ящике  белых и чёрных шара. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность, что оба шара белые?

Ответ: 

1. В условиях предыдущей задачи определить вероятность того, что один

из вынутых шаров белый, а другой чёрный.

Ответ: 

1. Вероятность того, что в южном городе  температура в июне в любой

день меньше , равна  (- малое число, квадратом которого можно

пренебречь). Какова вероятность того, что в течении первых трёх дней

июля температура будет не меньше ?

Ответ: 

**Тема: Формула полной вероятности. Формула Байеса.**

Предположим, что событие  может наступить только вместе с одним из попарно несовместных событий  образующих полную систему т.е. ,  называются гипотезами.

Тогда справедлива формула полной вероятности:



**Решить задачу:**

Имеется три партии ламп по и  штук в каждой. Вероятность того, что лампы проработают заданное время, равна для каждой партии соответственно  и . Какова вероятность того, что выбранная на удачу лампа проработает заданное время.

Решение:

Пусть:  - взятая наудачу лампа проработает заданное время

 - лампа выбрана из первой партии

 - лампа выбрана из второй партии

 - лампа выбрана из второй партии

Тогда: 









Ответ: 

**Задания для самостоятельной работы:**

1) Имеются две одинаковые урны. Первая содержит два чёрных и три белых

шара, вторая два чёрных и один белый шар. Сначала произвольно

выбирают урну, а затем из неё наугад извлекают шар. Какова вероятность

того, что будет выбран белый шар?

Ответ:

1. С первого станка на сборку поступает  изготовленных деталей, со

второго - , с третьего - . Вероятность изготовления бракованной

детали для каждого станка равна соответственно . Найти

вероятность того, что наудачу выбранная деталь оказалась бракованной.

Ответ: 

1. Стрельбу ведут  солдат. Для пяти из них вероятность попадания  для трёх -  и для остальных - . Какова вероятность поражения цели.

Ответ: 

1. Имеется  винтовок, три из которых с оптическим прицелом. Вероятность попадания при одном выстреле из винтовки с оптическим прицелом равна ; без оптического прицела - . Найти вероятность попадания в цель, если стрелок сделает один выстрел из наудачу взятой винтовки.

Ответ: 

1. Имеются четыре урны. В первой урне  белый и  чёрный шары. Во

второй урне белых и  чёрных шара. В третьей урне  белых и  чёрных

шаров. В четвёртой урне  белых и  чёрных шаров. Выбирается наугад

одна из урн и вынимается из неё шар. Найти вероятность того, что этот

шар белый.

Ответ: 

Пусть событие  может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий (гипотез)  которые образуют полную группу событий. Если событие  уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формуле Байеса.

 - формула вероятности гипотез.

**Решить задачу:**

1) В первом ящике имеется  белых и  чёрных шаров, а во втором -  белых и  чёрных. Наугад выбирают ящик и шар. Известно, что вынутый шар – чёрный. Найти вероятность того, что был выбран первый ящик.

Решение:

Пусть:  - выбран первый ящик

 - выбран второй ящик

 - вынут чёрный шар

Тогда: 



Искомую вероятность того, что чёрный шар был вынут из первого ящика вычисляем по формуле Байеса.



Ответ: 

1. На складе находятся детали, изготовленные на двух заводах. Известно, что объём продукции первого завода в четыре раза превышает объём продукции второго завода. Вероятность брака на первом заводе равна , на втором - . Наудачу взятая деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что эта деталь изготовлена первым заводом.

Решение:

Пусть:  - взятая деталь изготовлена на первом заводе

 - взятая деталь изготовлена на втором заводе

 - взятая деталь бракована

Тогда: 





Вероятность того, что деталь изготовлена на первом заводе, вычисляем по формуле Байеса.



Ответ: 

**Задания для самостоятельной работы:**

* 1. На склад поступили детали с трех станков. На первом станке изготовлено  деталей от их общего количества, на втором -  и на третьем - ,

причём на первом станке было изготовлено  деталей первого сорта, на втором -  и на третьем - . Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь окажется первого сорта.

Ответ: 

* 1. В первом ящике имеется  белых и  чёрных шаров, а во втором  белых и  чёрных. Наугад выбирают ящик и шар. Известно, что вынутый шар –чёрный. Найти вероятность того, что был выбран первый ящик.

Ответ: 

* 1. В урну, содержащую три шара, положили белый шар, после чего из неё наугад вынули один шар. Найдите вероятность того, что извлечённый шар окажется белым, если все возможные предположения о первоначальном составе шаров (по цвету) равновозможные.

Ответ: 

* 1. В ящике сложены детали:  деталей с первого участка,  - со второго и  - с третьего. Вероятность того, что деталь изготовленная на втором участке, отличного качества равна  , а для деталей изготовленных на первом и третьем участках . Найдите вероятность того, что наудачу извлечённая деталь окажется отличного качества.

Ответ: 

5) На двух автоматах производятся одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата втрое больше производительности второго. Первый автомат в среднем производит  деталей первого сорта, а второй . Взятая наудачу с конвейера деталь оказалась первого сорта. Найдите вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

Ответ: 

6) Имеется три партии деталей по  штук в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй и третьей партиях соответственно равно  и . Из произвольно выбранной партии наудачу извлечена деталь, оказавшаяся стандартной. Деталь возвращают в партию и вторично из той же партии наудачу извлекают деталь, которая так же оказывается стандартной. Найдите вероятность того, что детали были извлечены из третьей партии.

Ответ: 

7) Имеются три одинаковых по виду ящика. В первом ящике  белых

шаров. Во втором ящике  белых и  чёрных шаров. В третьем ящике

 чёрных шаров. Из выбранного наугад ящика выбрали белый шар.

Вычислить вероятность того, что шар вынут из первого ящика.

Ответ: 

8) Партия деталей изготовлена тремя рабочими, причём первый рабочий

изготовил  деталей, второй , третий . В продукции первогорабочего брак составляет , в продукции второго -  и в продукции третьего . Случайно выбранная для контроля деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она изготовлена вторым рабочим.

Ответ: 

**Тема: Формула Бернулли.**

Задачи в которых рассматриваются повторные независимые испытания с двумя исходами решаются по формуле Бернулли.



где:  - вероятность того, что в  независимых испытаниях событие 

произойдёт  раз.

- вероятность того, что событие  произойдёт

 вероятность того, что событие  не произойдёт.

**Например:**

Монета подбрасывается  раз. Какова вероятность того, что при этом герб выпадет ровно три раза?

Решение:

Пусть  - выпадает герб, тогда





Ответ: 

**Решить задачу:**

Самолёт имеет четыре двигателя. Вероятность нормальной работы каждого двигателя . Найти вероятность того, что в полёте могут возникнуть неполадки водном из двигателей.

Решение:

Работа каждого двигателя – независимое испытание. Всего четыре испытания с двумя исходами.

Пусть:  - нормальная работа двигателя, тогда

 - неполадки



Ответ: 

**Решить задачу:**

Вероятность того, что лампа останется исправной после  часов работы, равна . Какова вероятность того, что из пяти ламп не менее трёх останутся исправными после  часов работы?

Решение:

Событие  - не менее трёх ламп останутся исправными, содержит в себе три несовместных события:

 - горят три лампы из пяти

 - горят четыре лампы из пяти

 - горят пять ламп из пяти









**Задания для самостоятельной работы:**

1. Вероятность того, что на некотором предприятии расход электроэнергии не превысит суточной нормы, равна . Какова вероятность того, что в течение пяти дней из семи, перерасхода электроэнергии не произойдёт?

Ответ: 

1. Для нормальной работы на линии должно быть не менее восьми автобусов, а их имеется десять. Вероятность невыхода каждого автобуса на линию равна . Найти вероятность нормальной работы линии на ближайший день.

Ответ: 

1. В цехе имеется три резервных мотора, работающих независимо друг от друга. Для каждого мотора вероятность того, что он включен в данный момент, равна . Какова вероятность того, что в данный момент включен хотя бы один мотор?

Ответ: 

1. При испытаниях по схеме Бернулли вероятность ровно двух успехов в трёх испытаниях в двенадцать раз больше, чем вероятность трёх успехов. Найти вероятность успеха в каждом испытании.

Ответ: 

1. Вероятность попадания в цель при одном выстреле составляет . Найти вероятность четырёх попаданий при шести выстрелах.

Ответ: 

1. В приборе четыре лампы. Вероятность выхода из строя в течение года для каждой лампы, равна . Какова вероятность того, что в течение года придётся заменить не менее половины ламп.

Ответ: 

1. Вероятность того, что суточный расход газа на предприятии не превысит нормы, равна . Какова вероятность того, что в течение недели предприятие трижды допустит перерасход газа?

Ответ: 

1. В приборе шесть ламп. При повышении напряжения в цепи каждая лампа выходит из строя независимо от других с вероятностью . При перегорании четырёх ламп прибор выходит из строя с вероятностью , при перегорании пяти ламп – с вероятностью , при перегорании шести ламп – с вероятностью . Определить вероятность выхода прибора из строя при повышении напряжения.

Ответ: 

1. Определить вероятность того, что в семье имеющей пять детей будет три девочки и два мальчика. Вероятность рождения девочки и мальчика будем считать одинаковыми.

Ответ: 

1. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что среди детей не больше трёх девочек.

Ответ: 

1. В классе  учеников:  мальчиков и  девочек. На каждый из трёх вопросов заданных учителем ответили по одному ученику. Какова вероятность того, что среди ответивших учеников было два мальчика и одна девочка?

Ответ: 

1. В каждом из четырёх ящиков по  белых и  чёрных шаров. Из каждого ящика вынули по одному шару. Какова вероятность вынуть два белых и два чёрных шара.

Ответ: 

1. Восемь рабочих используют время от времени электроэнергию. Снабжение рассчитано на пять единиц электроэнергии. Каждому рабочему с одной и той же вероятностью  может потребоваться единица электроэнергии. Найдите вероятность перегрузки в снабжении, если известно, что рабочие работают независимо, и каждый из них потребляет энергию в среднем  минут в течение часа.

Ответ: 

**Тема: Случайная величина. Закон распределения случайной величины.**

Во всех задачах, которые мы рассматривали, в результате эксперимента происходило некоторое случайное событие, которое характеризовалось определённым числом. Например: число случаев брака, или число попаданий в мишень при стрельбе, или число вышедших из строя двигателей, или число выпавшее на верхней грани кубика и т. д. При этом случайный характер исхода влечёт за собой случайность числа; это означает, что при повторении опыта оно меняется непредвиденным образом.

Случайной величиной называется переменная величина, которая в зависимости от исходов испытания принимает то или иное значение, зависящее от случая. Если значения, которые принимает случайная величина можно записать в виде последовательности чисел, то она называется дискретной. Если случайная величина может принимать все значения из некоторого промежутка, то она называется непрерывной. Мы здесь будем рассматривать только случай дискретной случайной величины.

Законом распределения случайной величины называется соответствие между значениями этой величины и их вероятностями. Его удобно записывать в виде таблицы.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| значения случайной величины - |  |  |  |  | ……. |  |
| Вероятности - |  |  |  |  | ……. |  |

События  являются несовместными и единственно возможными, т.е. они образуют полную систему событий. Поэтому сумма их вероятностей равна единице.



**Решить задачу:**

1) Разыгрываются две вещи стоимостью по  рублей и одна вещь стоимостью  рублей. Составить закон распределения выигрышей для человека, купившего один билет из пятидесяти.

Решение:

Случайная величина  – выигрыш, принимает три значения.

 ( благоприятных исходов)

 ( благоприятных исхода)

 ( благоприятный исход)

Найдём их вероятности.

Закон распределения случайной величины имеет вид:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Проверка: 

2) Составить таблицу распределения вероятностей случайного числа очков, выпавшего на верхней грани игрального кубика при одном подбрасывании

Решение:

- число очков.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

1. Подбрасывается два игральных кубика, подсчитывается число очков выпавших на обеих верхних гранях. Найти закон распределения дискретной случайной величины  – суммы выпавших очков на двух игральных костях.

Решение:

Случайная величина  произойдёт в результате совместного появления двух независимых событий, на первом кубике одно очко и на втором кубике одно очко, т. е. . Следовательно .

Случайная величина  произойдет в результате появления одного из двух несовместных событий  или . Следовательно .

Случайная величина  произойдет в результате появления одного из несовместных событий , , . Следовательно .

Случайная величина это появление одного из несовместных событий , , , . Следовательно .

Случайная величина  это появление одного из несовместных событий , , , , . Следовательно .

Случайная величина  это появление одного из событий , , , , , . Следовательно .

Случайная величина  это появление одного из событий , , , ,. Следовательно .

Случайная величина это появление одного из несовместных событий , , , . Следовательно .

Случайная величина  произойдет в результате появления одного из несовместных событий , , . Следовательно .

Случайная величина  произойдет в результате появления одного из несовместных событий , . Следовательно .

Случайная величина  это результат совместного появления двух независимых событий . Следовательно .

Результаты записываем в таблицу.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Задания для самостоятельной работы:**

1. Стрелок делает по мишени три выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна . Построить ряд распределения числа попаданий.

Ответ:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

1. В урне имеется четыре шара с номерами ,,,. Вынули два шара. Случайная величина  – сумма номеров шаров. Построить ряд распределения случайной величины.

Ответ:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

1. В сборной команде техникума по стрельбе  человек, из них перворазрядников. Наудачу выбирают двух членов сборной. Составьте закон распределения числа перворазрядников среди выбранных.

Ответ:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

1. В коробке находятся  карандашей, из которых  красные. Наудачу извлекают три карандаша. Какой закон распределения имеет случайная величина, означающая число извлечённых красных карандашей.

Ответ:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

1. В урне  белых и  чёрных шаров. Вынули один шар. Случайная величина - число вынутых белых шаров. Построить ряд распределения случайной величины.

Ответ:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

1. Подбрасываются две симметричные монеты, подсчитывается число гербов на верхних сторонах монет. Рассматривается дискретная случайная величина - число выпадения гербов на обеих монетах. Записать закон распределения случайной величины Х.

Ответ:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

1. Монета подбрасывается три раза. Рассматривается случайная величина  - число появлений герба. Найти распределение случайной величины .

Ответ:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

1. Стрелок, имея четыре патрона, стреляет до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле равна . Построить закон распределения числа использованных патронов.

Ответ:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

1. Выпущено  лотерейных билетов, причём  билетов принесут их владельцам выигрыш по  рублей,  билетов – по  рублей и  билетов – по  рублей. Остальные билеты без выигрышные. Найдите закон распределения выигрыша для владельца одного билета.

Ответ:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

1. Дискретная случайная величина  имеет закон распределения

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Найти вероятность  и , если известно, что  в четыре раза больше .

Ответ: 

1. Производятся три независимых опыта, в каждом из которых событие  появляется с вероятностью . Рассматривается случайная величина  – частота появления события  в трёх опытах. Найдите закон распределения случайной величины .

Ответ:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

**Тема: Математическое ожидание и дисперсия случайной величины.**

Закон распределения является исчерпывающей характеристикой случайной величины. Однако не в каждой задаче нужно знать весь закон распределения. В ряде случаев можно обойтись одним или несколькими числами, которые отражают наиболее важные особенности закона распределения. Например число, имеющее смысл среднего значения случайной величины, или число характеризующее средний размер отклонения случайной величины от своего среднего значения. Такого рода числа называют числовыми характеристиками случайной величины.

Если известна дискретная случайная величина , закон распределения которой имеет вид

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  | …… |  |
|  |  |  |  |  | …… |  |

То математическим ожиданием (или средним значением) дискретной случайной величины  называется число 

**Пример:**

Найти математическое ожидание числа очков, выпадающих при бросании игральной кости.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

Тогда 

Различные случайные величины могут иметь одно Ито же математическое ожидание. Поэтому необходимо ввести ещё одну числовую характеристику для измерения степени рассеивания, разброса значений случайной величины , около её математического ожидания.

Разность , где - математическое ожидание случайной величины , называется отклонением случайной величины от её математического ожидания. Дисперсией случайной величины называется число  т.е. дисперсия есть математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания.

**Пример:**

Пусть - число очков, выпавших при одном бросании игральной кости. Найти дисперсию случайной величины .

Решение:

 (предыдущий пример)



Для дисперсии случайной величины справедлива так же формула  Вычисления по этой формуле значительно проще.

**Пример:**

Законы распределения случайных величин  и заданы таблиөами.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Найти , , , .

Решение:









Таким образом, случайные величины  и  принимают здесь одни и те же значения и имеют одно и тоже математическое ожидание, но разброс значений у случайной величины  больше, чем у случайной величины , так как значения  более удалённые от математического ожидания, случайная величина  принимает с большей вероятностью, а значения  менее удалённые от математического ожидания принимает с меньшей вероятностью, чем . Это и определяет неравенство .

**Задания для самостоятельной работы:**

1. Случайная величина имеет закон распределения:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Найти  и 

Ответ: 

2) Монету подбрасывают пять раз. Найти дисперсию случайной величины  - выпадения герба.

Ответ: 

3) Случайная величина  характеризуется рядом распределения:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Найти  и .

Ответ: 

4) Число очков, выбиваемых при одном выстреле каждым из двух игроков, имеет закон распределения:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Какой из стрелков стреляет лучше?

Ответ: второй стреляет лучше.

5) В урне  белых и  чёрных шара. Из урны извлекается шар, пять раз подряд, причём каждый раз вынутый шар возвращается в урну и шары перемешиваются. Приняв за случайную величину  число извлечённых белых шаров, составить закон распределения для величины  и определить её математическое ожидание и дисперсию.

Ответ:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

 

6) Имеются четыре лампочки, каждая из них с вероятностью  имеет дефект. Лампочка ввинчивается в патрон и включается ток. После включения тока дефектная лампочка сразу же перегорает, после чего заменяется другой. Найдите математическое ожидание числа испробованных лампочек.

Ответ: 

1. Составьте закон распределения количества делителей натурального числа, выбранного наугад от одного до десяти. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Ответ: 

1. На заводе работают четыре автоматические линии. Вероятность того, что в течение рабочей смены первая линия не потребует регулировки, равна , вторая – , третья , четвёртая – . Найдите математическое ожидание числа линий, которые в течение рабочей смены не потребуют регулировки.

Ответ: 

**Список использованной литературы:**

1. Решение задач по статистике комбинаторике и теории вероятности.

Автор-составитель В.Н. Студенецкая. Издательство «Учитель», 2005г. Волгоград.

1. Математика А.А. Дадаян И.Д.»Форум», 2003г. Москва.
2. Практические занятия по математике. Н.В. Богомолов. М.: Высшая школа, 1990г. Москва.
3. Сборник задач по математике для техникумов. И.Л. Соловейчик, В.Т. Лисичкин. ООО «Издательский дом ОНИКС 21 век». 2003г.
4. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть III. П.Е. Данко, А.Г. Попов. Издательство «Высшая школа». Москва-1971.