В обучении математике дифференциация имеет особое значение. Математика является одной из самых сложных школьных дисциплин, и вызывает субъективные трудности у многих школьников. В то же время имеется большое число учащихся с явно выраженными способностями к этому предмету. Дифференцированный подход к учащимся обеспечивает успех в учении, что ведет к пробуждению интереса к предмету, желанию получать новые знания, развивает способности учащихся. Обучение должно быть согласовано с уровнем развития ребенка. Поэтому необходимо определить по меньшей мере два уровня познавательной математической деятельности ребенка. Первый, актуальный, характеризующий то, какие задания он может выполнять самостоятельно, без помощи взрослых. Второй уровень – это так называемая «зона ближайшего развития». Данный уровень описывает, что ребенок способен выполнить лишь с небольшой помощью. Зоны актуального и ближайшего развития у каждого из учеников свои, а отсюда и разная динамика познавательной математической деятельности. Использование системы дифференцируемых заданий позволяет значительно сгладить остроту проблемы, позволяет прийти к более высокому качеству усвоения материала. В практике обучения математике чаще всего дифференцируют по степени трудности самостоятельные работы и домашние задания, с учётом уровня способностей учеников и их склонностей к предмету. Разноуровневые задания, составленные с учетом возможностей учащихся, создают в классе благоприятный психологический климат. У ребят возникает чувство удовлетворения после каждого верно решенного задания. Успех, испытанный в результате преодоления трудностей дает мощный импульс повышению познавательной активности.

Подобрать для каждого ученика задания, соответствующие уровню его развития совсем непросто, учителю необходимо перебрать множество заданий, решить их, разделить по уровням сложности, что требует много сил и времени. Здесь на помощь педагогу может прийти разработанный алгоритм составления индивидуальных заданий, основные моменты которого состоят в следующем:

* выбираются наиболее характерные типы примеров по изучаемой теме;
* вместо конкретных числовых значений вводятся параметры, и проводится возможный анализ решения, выявляются особенности и ключевые моменты задания, допускающие промежуточную проверку;
* определяя ограничения на параметры, получаем задачи различного уровня сложности, имеющие четкий алгоритм решения;
* на заключительном этапе, вместо параметров задаем числовые значения и получаем примеры требуемого уровня сложности.

Проиллюстрируем этот алгоритм на примере составления заданий по теме «Иррациональные уравнения».

**Пример 1.**Решитеуравнение.

Решение. Уравнение равносильно системе 

Решая эту систему, получим.

Ответ: .

Теперь рассмотрим общий вид такого уравнения , где 

Уравнение равносильно системе 

Найдем дискриминант квадратного уравнения.. Обозначим . Тогда . Пусть . В результате имеем . Находим корни уравнения: 

Очевидно, что не является корнем уравнения при а  при .

Приведем примеры уравнений при различных значениях параметров 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№** |  |  |  | ***уравнение*** | ***корни*** |
| **1** | -2 | 7 | 1 |  | 2 |
| **2** | -1 | 0 | -2 |  | 4 |
| **3** | 0 | 4 | 4 |  | -4 и -3 |
| **4** | 1 | -1 | -1 |  | 1 и 2 |
| **5** | 2 | 2 | 0 |  | 2 |
| **6** | 3 | 8 | 2 |  | 1 |
| **7** | 4 | 9 | -3 |  | 7 |
| **8** | 5 | 21 | 1 |  | 4 |
| **9** | 0 | -3 | -3 |  | 3 и 4 |
| **10** | 1 | 5 | 5 |  | -5 и -4 |

Повысим уровень сложности рассмотренного уравнения. Для этого рассмотрим уравнение вида , где 

Отсюда

Если , то  корнем уравнения не является; решение второго уравнения рассмотрено выше.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№** |  |  |  |  | ***уравнение*** | ***корни*** |
| **1** | -2 | 7 | 1 | 3 |  | -3 и 2 |
| **2** | -1 | 0 | -2 | 2 |  | 4 |
| **3** | 0 | 4 | 4 | 1 |  | -3 и -4 |
| **4** | 1 | -1 | -1 | 0 |  | 1 и 2 |
| **5** | 2 | 2 | 0 | -1 |  | 1 и 2 |
| **6** | -2 | 3 | -3 | -2 |  | 2 и 6 |
| **7** | -2 | 2 | -4 | -3 |  | 3 и 7 |
| **8** | 0 | 1 | 1 | 2 |  | -1 |
| **9** | -1 | 5 | 3 | -4 |  | -4 и 4 |
| **10** | 2 | 3 | 1 | 5 |  | 1 |

**Пример 2.** Решите уравнение .

Решение. Перепишем уравнение в виде  и возведем обе части уравнения в квадрат.



Запишем уравнение в общем виде . Повторим сделанное выше и попытаемся выявить ключевые моменты решения.



|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№** |  |  |  | ***уравнение*** | ***корни*** |
| **1** | 4 | 3 | 2 |  |  |
| **2** | 5 | 2 | 1 |  | Нет корней |
| **3** | 5 | 1 | 2 |  | -1 |
| **4** | -2 | -1 | 3 |  |  |
| **5** | -3 | 4 | 1 |  | 12 |
| **6** | 11 | -15 | 5 |  | Нет корней |
| **7** | -2 | -18 | 4 |  | 18 |
| **8** | 5 | 2 | 3 |  | -1 |
| **9** | 3 | -1 | 2 |  | 1 |
| **10** | 2 | 5 | 1 |  | -1 |

Усложним конструкцию.



|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№** |  |  |  | ***уравнение*** | ***корни*** |
| **1** | 4 | 3 | 2 |  |  |
| **2** | 5 | 2 | 1 |  | Нет корней |
| **3** | 5 | 1 | 2 |  | -1 |
| **4** | -2 | -1 | 3 |  |  |
| **5** | -3 | 4 | 1 |  | 3 и 12 |
| **6** | 11 | -15 | 5 |  | Нет корней |
| **7** | -2 | -18 | 4 |  | 18 |
| **8** | 5 | 2 | 3 |  | -1 |
| **9** | 3 | -1 | 2 |  | 1 |
| **10** | 2 | 5 | 1 |  | -2 и -1 |

**Пример 3.** Решите уравнение .

Решение.

.

Перепишем задание в виде 





|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№** |  |  |  | ***уравнение*** | ***корни*** |
| **1** | 3 | 1 | 5 |  | 2 |
| **2** | 2 | -4 | 10 |  | -1 |
| **3** | 1 | 3 | 5 |  |  |
| **4** | 6 | 4 | 26 |  | 5 |
| **5** | 2 | 6 | 20 |  |  |
| **6** | 5 | 1 | 13 |  | 3 |
| **7** | 7 | -3 | 29 |  | 2 |
| **8** | 2 | 4 | 10 |  |  |
| **9** | 3 | 5 | 17 |  |  |
| **10** | 4 | -6 | 26 |  | -1 |

**Пример 4.** Решите уравнение .

Решение. Обозначим Тогда уравнение можно будет переписать в виде 

 Полученное уравнение будет иметь корни -1 и -6.

Ответ: -1; -6.

Зададим общий вид уравнения .

Производим замену , в результате чего приходим к уравнению

 Находим дискриминант 

. Если положить, что 

Тогда Используем полученные закономерности для составления уравнений заданного типа. Уравнения будем создавать с конца, задавая корни.

Приведу пример.

Допустим мы хотим получить корни -3 и 2. Произвольным образом задаем . Допустим Тогда 



Таким образом получаем уравнение .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№** |  |  |  |  |  |  |  |  | ***уравнение*** | ***корни*** |
| **1** | 3 | 12 | 7 | 2 | 2 | 1 | -2 | -10 |  | -3;2 |
| **2** | 5 | 30 | 11 | 1 | 6 | 3 | 3 | 13 |  | -1;-2 |
| **3** | 4 | 20 | 9 | 5 | 1 | -3 | 15 | -5 |  | -2; 5 |
| **4** | 2 | 6 | 5 | 3 | 1 | -8 | 16 | 10 |  | 1; 7 |
| **5** | 5 | 30 | 11 | 4 | 1,5 | -5 | 2 | -17 |  | -2; 7 |
| **6** | 3 | 12 | 7 | 2 | 2 | 5 | 8 | 10 |  | -4; -1 |
| **7** | 3 | 12 | 7 | 1 | 4 | 2 | 1 | 1 |  | -2; 0 |
| **8** | 3 | 12 | 7 | 2 | 2 | -3 | 6 | 6 |  | 1; 2 |
| **9** | 3 | 12 | 7 | 3 |  | -1 | 3 | -5 |  | -2; 3 |
| **10** | 3 | 12 | 7 | 2 | 2 | -8 | 19 | 32 |  | 3; 5 |

**Пример 5.** Решите уравнение .

Решение.Уединив первый радикал, получаем уравнение, равносильное исходному.

Возводим обе части этого уравнения в квадрат или ,

. Еще раз возводимобе части уравнения в квадрат



Ответ: 2

Рассмотрим общий случай уравнения данного вида.



ПоложимПриходим к уравнению

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№** |  |  |  |  |  |  | ***уравнение*** | ***корни*** |
| 1 | 2 | 1 | 9 | 3 | 2 | -4 |  |  |
| 2 | 1 | 1 | 4 | 5 | 4 | -2 |  |  |
| 3 | 1 | 4 | 9 | 2 | 1 | -4 |  |  |
| 4 | 3 | 4 | 25 | 1 | 0 | -18 |  |  |
| 5 | 2 | 9 | 25 | 2 | 1 | -12 |  |  |
| 6 | 3 | 1 | 16 | 6 | 5 | -6 |  |  |
| 7 | 1 | 9 | 16 | 5 | 4 | -6 |  |  |
| 8 | 2 | 25 | 49 | 4 | 3 | -20 |  |  |
| 9 | 1 | 1 | 4 | 6 | 5 | -2 |  |  |
| 10 | 2 | 16 | 36 | 4 | 3 | -16 |  |  |

**Пример 6.** Решите уравнение .

Решение. Введем новую переменную Тогда уравнение можем переписать в виде  или



При .

При 

При 

Таким образом, получаем, что 

Ответ: 

Введем параметры. Перепишем уравнение в виде . Обозначив получим  или

(\*)

Введем ограничения на параметры  В результате получаем, что . Учитывая заданные условия приступаем к решению уравнения (\*).

При .

При 

При 

Таким образом, получаем, что 

Ответ: 

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№** |  |  |  |  |  | ***уравнение*** | ***корни*** |
| **1** | 4 | 1 | 3 | 2 | 13 |  |  |
| **2** | 1 | 2 | 6 | 4 | 37 |  |  |
| **3** | -1 | 3 | 9 | 6 | 79 |  |  |
| **4** | -2 | 1 | 3 | 2 | 7 |  |  |
| **5** | 3 | 2 | 6 | 4 | 39 |  |  |
| **6** | -5 | 3 | 9 | 6 | 76 |  |  |
| **7** | 4 | 4 | 12 | 8 | 148 |  |  |
| **8** | 3 | 1 | 3 | 2 | 12 |  |  |
| **9** | -3 | 2 | 6 | 4 | 33 |  |  |
| **10** | -4 | 3 | 9 | 6 | 77 |  |  |

Как видим, используя данный алгоритм, мы можем получить неограниченное число заданий, причем варьируя уровень их сложности.